

Юные таланты (11 класс)

Задание 1 (6 баллов)

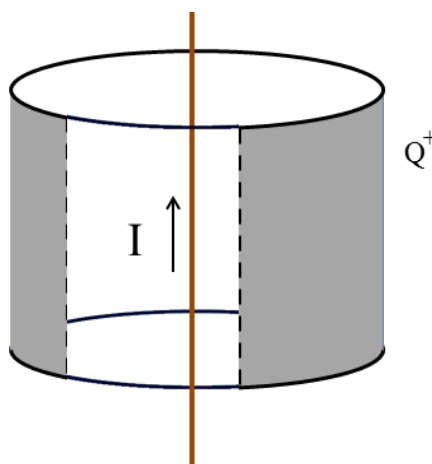


Рис. 1.1. Положительно заряженная цилиндрическая поверхность и провод с током

Вдоль оси полого цилиндра протянут тонкий медный провод. Вся система находится в вакууме, а боковая поверхность цилиндра положительно заряжена (рис.1.1). Основания цилиндра выполнены из стекла, в связи с чем провод электрически изолирован от боковой поверхности цилиндра. В тот момент, когда по проводу начинает течь ток I , заряд поверхности Q начинает уменьшаться. Отмечено, что максимальная скорость уменьшения заряда поверхности растёт при увеличении начального значения Q . Объясните явление уменьшения заряда боковой поверхности цилиндра и зависимость максимальной скорости этого процесса от начального значения заряда.

Решение:

В отсутствие тока вокруг электрически-нейтрального провода образуется электронное облако (большее в связи с наличием положительнозаряженного тела вблизи). Заряд цилиндрической оболочки при этом уменьшается неощутимо слабо. Формирование электронного слоя быстро приводит к увеличению потенциального барьера, что обуславливает минимизацию потока электронов с провода на заряженную поверхность.

Медный провод, с момента пуска по нему тока, начинает нагреваться. Из-за нагрева увеличивается кинетическая энергия электронов: имеет место явление термоэлектронной эмиссии, обуславливающее резкое увеличение потока электронов с провода.

При увеличении начального заряда цилиндрической оболочки максимальная скорость его уменьшения растёт в связи с уменьшением потенциального барьера: увеличивается разность потенциалов, плотность электронов близ поверхности при наличии электронной эмиссии уменьшается

Критерий		Балл
Описана причина резкого увеличения потока электронов с провода.	Подробно	3 б
	Скучно (отсутствует часть описания)	1 б
Объяснена зависимость скорости разрядки цилиндрической оболочки в условиях протекания тока по проводу от начального значения заряда.	Подробно	3 б
	Скучно (отсутствует часть описания)	1 б

Задание 2 (8 баллов)

Для осуществления аналогового управления некоторым аппаратом необходимо создать электрическое устройство, моделирующее движение динамической системы, пространственная конфигурация которой приведён на рисунке 2.1. Предложите принципиальную схему такого устройства, используя простейшие радиокомпоненты (резистор, конденсатор, катушка индуктивности, источник питания и т.д.). Укажите, какие измеряемые характеристики (ток, напряжение) и на каких элементах предложенной схемы позволяют определить состояние системы указанного вида. Докажите, что предложенная схема корректно отражает состояние системы. На рисунке изображено положение равновесия: моделируется возмущённое движение.

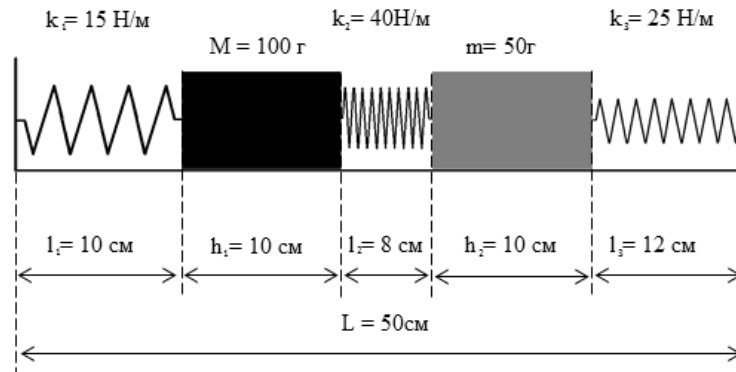


Рис. 2.1 .Рассматриваемая динамическая система в положении равновесия

Решение:

Приводится один из возможных вариантов решения

Рассмотрим систему, изображённую на рисунке 2.1. Введём две координаты образом, показанным на рисунке: x - отклонение крайней правой точки левой пружины от равновесного положения и y - аналогично (отклонение левой точки) для правой пружины. Из геометрических соображений получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ma_M = -k_1x + k_2(y - x) \\ ma_m = -k_3y + k_2(x - y) \end{cases} \quad (2.1)$$

Откуда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} Ma_M = M \frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x + k_2y \\ ma_m = m \frac{d^2y}{dt^2} = -(k_3 + k_2)y + k_2x \end{cases} \quad (2.2)$$

Члены, описывающие инертность системы (произведения масс грузов на ускорения) наводят на мысль об использовании индуктивных элементов. Тот факт, что они присутствуют изолированно в каждом из уравнений, предполагает отсутствие индуктивной связи между элементами. Так как система обладает двумя независимыми переменными, положим наличие двух независимых контуров. Относительно правой части можно сказать, что наличие линейных по смещению членов в рамках данной аналогии приводит к необходимости использования конденсаторов, причём, структура уравнений подсказывают, что имеется общий для обоих контуров конденсатор. Таким образом, предполагаемая цепь имеет вид, изображённый на рисунке к решению №2.

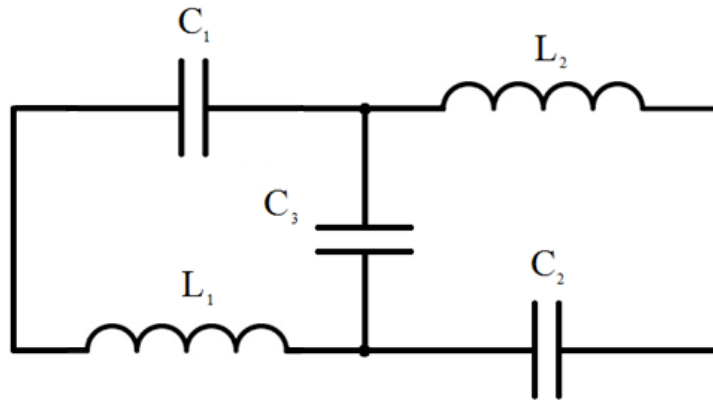


Рисунок к решению №2. Принципиальная схема

Уточним значения ёмкостей и индуктивностей в цепи. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} = -\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right) q_1 + \frac{1}{C_3} q_2 \\ L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} = +\frac{1}{C_3} q_1 - \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2}\right) q_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

где q_1 и q_2 – заряды на обкладках конденсаторов 1 и 2, соответственно. Откуда путём сопоставления, найдём, что можно взять $L_1 = K[M]\text{Гн}$, $L_2 = K[m]\text{Гн}$, $C_1 = K\left[\frac{1}{k_1}\right]\text{Гн}$, $C_2 = K\left[\frac{1}{k_2}\right]\text{Гн}$, $C_3 = K\left[\frac{1}{k_3}\right]\text{Гн}$, где K - безразмерный множитель, а $[\cdot]$ - означает взятие от аргумента безразмерной величины в текущей системе единиц измерения ($[8\text{ м}] = 8$).

Критерий	Балл	
Получена система уравнений (2.1) в каком-либо полном виде (указанном, векторном и т.д.)	0,5 б	
Сделан корректный переход к системе уравнений (2.2)	1 б	
Проведены рассуждения относительно ролей инертных и упругих компонент системы (возможны различные электромеханические аналогии)	Подробно (с глубоким анализом)	3 б
	Скудное описание	2 б
Предложена корректная принципиальная схема	1 б	
Получена система уравнений вида (2.3)	1,5 б	
Уточнены характеристики компонент схемы	1 б	

Задание 3(8 баллов)

Газ находится между двумя одинаковыми перегородками площадью $S = 0,025\text{ м}^2$, способными двигаться по трубе с трением. К левой перегородке прикладывают силу $F = 1100\text{ Н}$, в результате чего сначала левая, а затем и правая перегородки приходят в движение. Определите установившееся расстояние между перегородками, если в начальный момент оно составляет $x_0 = 1\text{ м}$, а давление газа равно атмосферному (принять равным 100 кПа). Температуру газа считать постоянной. Трение, действующее на перегородки, считать одинаковым.

Решение:

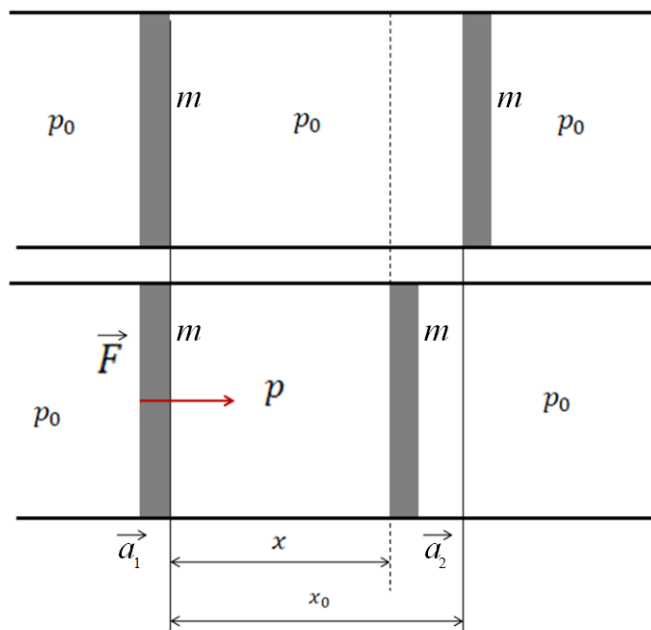


Рис. 3.1. Рассматриваемая система в покое (вверху) и под действием внешней силы (внизу)

Исследуемая система имеет вид, изображённый на рисунке 3.1. Запишем второй закон Ньютона для перегородок в проекции на ось движения с учётом конечной их массы и давления со стороны газа:

$$F - F_{\text{тр}} - F_{\text{дав}} = ma_1, \quad (3.1)$$

$$-F_{\text{тр}} + F_{\text{дав}} = ma_2. \quad (3.2)$$

В установившемся движении ускорения одинаковы ($a_1 = a_2$), поэтому:

$$\begin{aligned} F - F_{\text{тр}} - F_{\text{дав}} &= -F_{\text{тр}} + F_{\text{дав}}; \\ F &= 2F_{\text{дав}} = 2S(p - p_0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

Отсюда получаем необходимое давление в полости с газом:

$$p = p_0 + \frac{F}{2S}. \quad (3.4)$$

Записывая уравнение для изотермического процесса, будем иметь:

$$p_0 V_0 = pV, \quad V_0 = Sx_0, \quad V = Sx, \quad (3.5)$$

$$p_0 x_0 = px, \quad (3.6)$$

Откуда окончательно получаем:

$$x = \frac{p_0}{p_0 + F/2S} x_0, \quad (3.7)$$

$$x = \frac{10^5}{10^5 + 1100/0,05} \approx 0,82 \text{ м} \quad (3.8)$$

Критерий	Балл
Корректно записан второй закон Ньютона (3.1) и (3.2)	1 б
Сделан вывод об одинаковости ускорений для рассматриваемого движения	1 б
Получено выражение (3.4)	2 б
Корректно применено уравнение для изотерм в виде (3.5) и (3.6)	2 б
Получено выражение (3.7) и верно получен ответ (3.8)	2 б

Задание 4 (12 баллов)

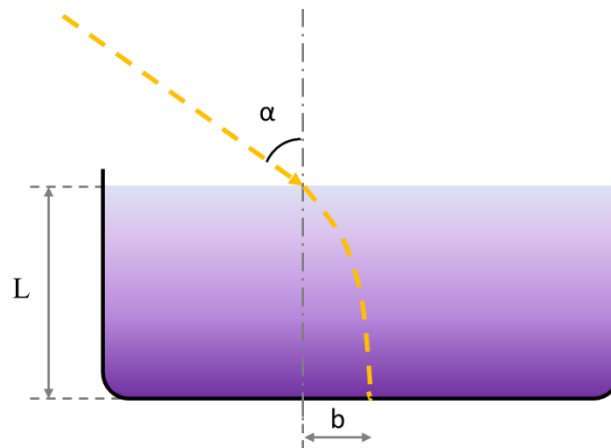


Рис. 4.1. Кювета с раствором и примерный ход луча в ней

Дан резервуар с водным раствором некоторого вещества (рис.4.1), распределение которого в объёме неоднородно: концентрация зависит только от глубины погружения (см. график на рис. 4.2). Исследуйте эффект преломления луча света в этом растворе (примерный ход луча представлен на рис. 4.1). Зависимость показателя преломления n от концентрации вещества показана на рис. 4.3, высота кюветы $L = 4$ м, угол падения луча $\alpha = 30^\circ$.

Постройте математическую модель явления. Дайте теоретически обоснованную количественную оценку величины b (рис.4.1) и величину допускаемой при этом ошибки.

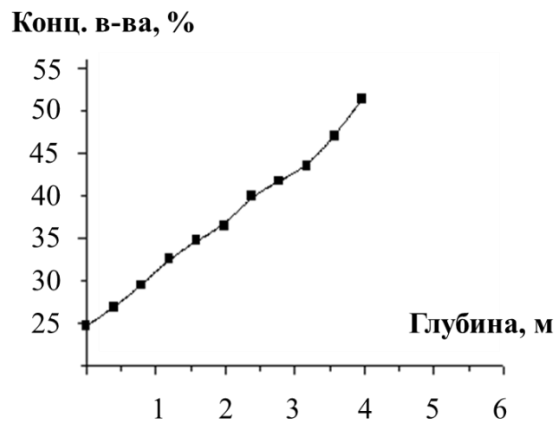


Рис.4.2. График зависимости концентрации раствора от глубины погружения

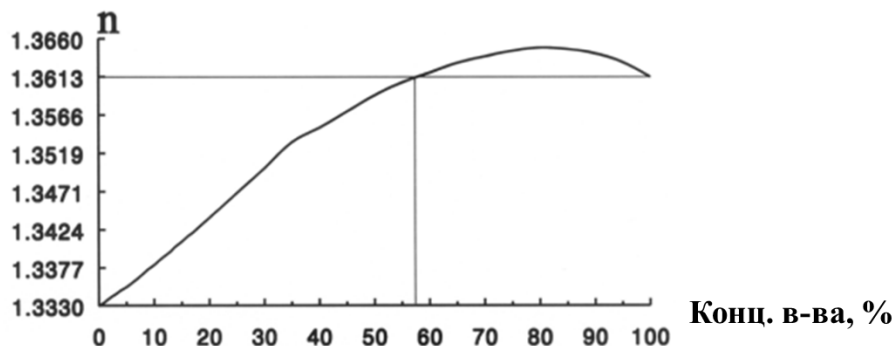


Рис.4.3. График зависимости показателя преломления от концентрации растворённого вещества

Решение:

Разобьем весь объем жидкости на конечную группу слоёв. В каждом из них показатель преломления будем считать постоянным. При этом в связи с ростом показателя преломления с глубиной получится аппроксимация снизу, если значения n брать в верхней точке слоя, и сверху,

если в нижней точке. Для каждой границы раздела выполняется классический закон преломления (рис. 4.4).

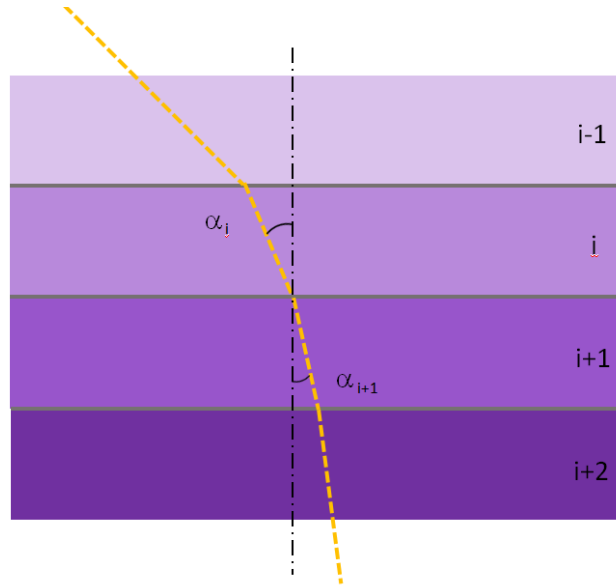


Рис. 4.4. Деление объема жидкости на слои

Отсюда будем иметь выражение:

$$\frac{\sin(\alpha_{i+1})}{\sin(\alpha_i)} = \frac{n_i}{n_{i+1}}, \text{ или} \quad (4.1)$$

$$\sin(\alpha_{i+1})n_{i+1} - \sin(\alpha_i)n_i = \Delta_i(\sin(\alpha)n) = 0, \text{ откуда следует}$$

$$\sin(\alpha)n = \text{const} = C \quad (4.2)$$

Далее обратимся к вычислению расстояния проходимого лучом в направлении, параллельном дну (соответствующее отклонение обозначим за y , а удаление в глубину за x). Для i -го слоя получим:

$$y_i = x_i \operatorname{tg}(\alpha_i), \quad (4.3)$$

где выражая тангенс через синус и переходя к показателю преломления n , придём к следующему соотношению отклонений на i -м слое:

$$y_i = x_i \frac{C}{\sqrt{n_i^2 - C^2}}. \quad (4.4)$$

Далее есть несколько вариантов оценки итогового отклонения:

Первый способ заключается в определении массива значение $n_i(x_i)$ по графикам. **Второй** - в выделении линейных трендов, например:

$$\begin{aligned} \text{Конц.вещ.} &= 25 + (50 - 25) * \frac{x}{4}, \\ n &= 1,3330 + (1,3613 - 1,3330) * \frac{\text{Конц.вещ.}}{60} = 1,3448 + 0,0030x. \end{aligned}$$

Постоянную C можно найти из условий на поверхности:

$$\sin(\alpha(0))n(0) = C = \sin(30) * 1,3471 \approx 0.6736.$$

И тогда зависимость горизонтального отклонения от глубины примет вид:

$$\Delta y = \Delta x \frac{0.6736}{\sqrt{(1,3448 + 0,0030x)^2 - 0.6736^2}}$$

После чего необходимо просуммировать и перейти к пределу $\Delta x \rightarrow 0$:

$$b = \int_0^L \frac{0.6736}{\sqrt{(1,3448 + 0,0030x)^2 - 0.6736^2}} dx.$$

После вычисления интеграла (интеграл табличный), получаем:

$$b = \frac{0,6736}{0,0030} \ln \left| \frac{1,3448 + 0,0030L + \sqrt{(1,3448 + 0,0030L)^2 - 0.6736^2}}{1,3448 + \sqrt{(1,3448)^2 - 0.6736^2}} \right|, \text{ тогда} \quad (4.5)$$

$$b \approx 2,301 \text{ метра}$$

Относительно количественной оценки ошибки предлагается анализ ошибки определения аппроксимативной кривой (сумма квадратов отклонений) и анализ чувствительности решения от числа знаков **во втором варианте решения**. И указание доверительного диапазона (оценка на b снизу и сверху в зависимости от взятия $p_i(x_i)$ в верхней и нижней точках слоя, соответственно) **в первом варианте решения**.

Критерий	Балл
Записан закон преломления лучей на границе (4.1) безотносительно разбиения объёма на совокупность слоёв.	1 б
Сделан переход к разбиению на слои	3 б
Получено соотношение (4.2)	0,5 б
Получена соотношение (4.3)	0,5 б
Получено соотношение (4.4)	0,5 б
Получены уравнения для линий тренда, либо получены суммы для отклонения y_i	1,5 б
Проведена корректная оценка величины b	1 б
В случае вычисления значения через интеграл - проведены оценки допускаемой ошибки	2 б
В случае вычисления сумм, приведены рассуждения о верхней и нижней суммах и получен доверительный интервал	2 б
Результат получен через усреднение показателя преломления во всём объёме	+2 б (макс)
Приведён подробный анализ качественной картины явлений в системе	+1,5 б (макс)